10/3/21

|Φυλ. 2|

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ (*) $=$

$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow (\lambda^2-3)\cdot(\lambda^2-2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}$, $\lambda_3 = +\sqrt{3}$

Επειδή έχει 4 διαφορετικές (διακεκριμένες) ιδιοτιμές ο A διαγωνοποιείται. (Σταματάω εδώ! Δεν χρειάζεται να τον διαγωνοποιήσω)

(*) Έχω μηδενικά άρα η ορίζουσα ισούται με το γινόμενο αυτών που βρίσκονται πάνω απ' τα μηδενικά

2) ΝΔΟ AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές

Αν ο AB έχει το λ ιδιοτιμή, τότε $\exists\, u \neq \bar{0}$ ώστε:

$AB\cdot u = \lambda \cdot u \Rightarrow BABu = B(\lambda u) \Rightarrow BA(Bu) = \lambda(Bu) \Rightarrow$

$\Rightarrow BA\cdot v = \lambda \cdot v$.

Αν $v \neq \bar{0}$, τότε ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του BA

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 7-\lambda \end{pmatrix} =$

$= -(\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162)$ (*) [επειδή είναι τριτοβάθμιο πρέπει να έχει 3 ιδιοτιμές δεν ξέρω αν είναι όλες πραγματικές].

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Η 1 είναι σίγουρα πραγματική επειδή είναι περιττού βαθμού πολυώνυμο. Τι σχέση έχουν οι ιδιοτιμές με τον πίνακα? Το άθροισμα των ιδιοτιμών ισούται με το ίχνος του πίνακα και το γινόμενό τους με την ορίζουσα A

Δηλ. $\boxed{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = trA = 18}$ (1), $\boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 162 = detA}$ (2)

Εξετάζουμε τους διαιρέτες του 162: $\cancel{\pm 1}$, $\cancel{\pm 2}$, ± 3, ± 6, ± 9
Δοκιμάζω τους διαιρέτες του 162 στο χαρακτηριστικό πολ/μο και βλέπω ποιο μου ικανοποιεί την ισότητα (*)

$$\chi_A(3) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 3} \xRightarrow[(2)]{(1)} \lambda_2+\lambda_3 = 15,\ \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 54 \Rightarrow \lambda_2 = 6 \text{ και } \lambda_3 = 9$$

Έχει 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές $\Rightarrow$ A διαγωνοποιείται:

$$V(3): (A-3I)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y = 0 \Rightarrow y = -x \\ -2y+4z = 0 \Rightarrow z = \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

Δεν έχει σημασία που έχω άλλα νούμερα ή πρόσημα κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$V(3) = \langle (-2,2,1) \rangle \overset{\text{ή}}{=} \langle (2,-2,-1) \rangle = \langle (1,-1,-1/2) \rangle$$

είναι σωστός!!!

$$V(6) = \langle (2,1,2) \rangle$$
$$V(9) = \langle (-1,-2,2) \rangle$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix} \qquad P^{-1} = ?$$

$$A^k_k = P^k_s \Lambda^s_s P^{-1}{}^s_k$$

O A θεωρείται ως προς την κανονική βάση. Η βάση των ιδιοδιανυσμάτων δίνεται: $S = ((-2,2,1), (2,1,2), (-1,-2,2))$

O P^{-1} είναι πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική στην S

$$(1,0,0) = \alpha(-2,2,1) + \beta(2,1,2) + \gamma(-1,-2,2)$$
$$(0,1,0) = \alpha'(-2,2,1) + \beta'(2,1,2) + \gamma'(-1,-2,2)$$
$$(0,0,1) = \alpha''(-2,2,1) + \beta''(2,1,2) + \gamma''(-1,-2,2)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2/9 & 2/9 & 1/9 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ -1/9 & -2/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

ο P^{-1} μπορεί να βρεθεί και με γραμμοπράξεις ή με τον αλγόριθμο Gauss-Seidel

• $A^4 = ?$ Αφού A διαγωνοποιείται παίρνω κατευθείαν τη σχέση: $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$

$$A^4 = (P \cdot \Lambda \cdot P^{-1})^4 = P \begin{pmatrix} 3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 6^4 & 0 \\ 0 & 0 & 9^4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

• $B^2 = ?$ $B^2 = A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} \Rightarrow B = P \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{9} \end{pmatrix} P^{-1}$

B''

Μπορώ να πάρω και τον $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{9} \end{pmatrix}$

Δεν είναι μοναδικός

$\Downarrow$

$$\Rightarrow B^2 = P \begin{pmatrix} \sqrt{3}^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-\sqrt{6})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{9}^2 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

Scanned with CamScanner

4) $A_{n\times n}$ και $\forall\, x_{n\times 1} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ αυτό είναι ιδιοδιάνυσμα του A: δηλ.

$\exists\, \lambda_x$, ώστε $A \cdot X = \lambda_x \cdot X$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε ότι ο A έχει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot I_{n\times n}$$

6) $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$: $Au=\lambda_1 u$ και $B\cdot u=\lambda_2 u$

$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_k\cdot x^k \Rightarrow f(A)=a_0\cdot I+a_1A+a_2A^2+\dots+a_k\cdot A^k$ είναι $n\times n$ πίνακας:

$$f(A)(u)=a_0 I u+a_1Au+a_2A^2u+\dots+a_k\cdot A^k u=$$
$$=a_0u+a_1\lambda_1 u+a_2\lambda_1^2 u+\dots+a_k\lambda_1^k u=$$
$$=\underbrace{(a_0+a_1\lambda_1+a_2\lambda_1^2+\dots+a_k\lambda_1^k)}_{\text{αριθμός}}\cdot u=f(\lambda_1)\cdot u$$

$\Rightarrow$ Το u είναι ιδιοδιάνυσμα του $f(A)$. Με ιδιοτιμή το $f(\lambda_1)$

$$g(x)=b_0+b_1\cdot x+\dots+b_m\cdot x^m \Rightarrow g(B)\cdot u=g(\lambda_2)u$$

$$(f(A)+g(B))u=f(A)u+g(B)u=f(\lambda_1)u+g(\lambda_2)u=$$
$$=(f(\lambda_1)+g(\lambda_2))u$$

Άρα το u είναι ιδιοδιάνυσμα και του πίνακα $f(A)+g(B)$

5) $A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\2&a&-2\\0&0&a\end{pmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2=1$ για τον A

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{array}{c}+\\-\\+\end{array}\begin{pmatrix}3-\lambda&0&-2\\2&a-\lambda&-2\\0&0&a-\lambda\end{pmatrix}=(a-\lambda)\det\begin{pmatrix}3-\lambda&0\\2&a-\lambda\end{pmatrix}=$$
$$=(a-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$\lambda_1=\lambda_2=a$ και $\lambda_3=3 \Rightarrow a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\2&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$

$V(1): (A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3-1 & 0 & -2\\ 2 & 1-1 & -2\\ 0 & 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow 2x-2z=0 \Rightarrow \boxed{x=z}$

$y \in \mathbb{R}$

Ιδιοδιάνυσμα: $(x,y,x) = x(1,0,1) + y(0,1,0)$

$V(1) = \langle (0,1,0), (1,0,1) \rangle$

$V(3): (A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3-3 & 0 & -2\\ 2 & 1-3 & -2\\ 0 & 0 & 1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow -2z=0 \Rightarrow z=0$

$2x-2y=0 \Rightarrow x=y$

$V(3) = \langle (1,1,0) \rangle$

$\Lambda = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$A = P\cdot\Lambda\cdot P^{-1} \Leftrightarrow \boxed{P^{-1}\cdot A\cdot P = \Lambda}$

Την προηγούμενη φορά ορίσαμε το $m_A(x)$: ελάχιστο πολ/μο του A: μονικό, $m_A(A) = O_{n\times n}$, ελάχιστο βαθμό. Αν $f(x)$ πολ/μο με $f(A) = O_{n\times n} \Rightarrow f(x) = m_A(x)\cdot g(x)$

Cayley-Hamilton: $X_A(A) = O_{n\times n} = m_A(A)$ και το $m_A(x)$ διαιρεί το $X_A(x)$. Έχουν τις ίδιες ρίζες

A διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow$ $m_A(x)$ = γινόμενο πρωτοβαθμίων διακεκριμένων πολυωνύμων.

SOS Θέμα εξ.

Π.χ. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\chi_A(x)=?$, $m_A(x)=?$ $A^{202}-3A^{147}-2I_2=?$

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-2-\lambda & 3\\ -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+2)+3=\lambda^2-4+3=$$
$$=\lambda^2-1 \Rightarrow \lambda_1=-1 \quad \lambda_2=1$$

Διαγωνοποιείται $\Rightarrow m_A(x)=x^2-1=\chi_A(x)$

$\Downarrow$

$A=P\cdot\Lambda\cdot P^{-1}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A^2=P\cdot\Lambda^2\cdot P^{-1}=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot P^{-1}=I_2$$

$$A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A \Rightarrow \begin{cases}A^{2k}=I\\ A^{2k+1}=A\end{cases}$$

$$A^{202}-3A^{147}+2I=I-3A+2I=3(I-A)=3\begin{pmatrix}5 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}15 & -9\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

SOS Θέμα εξ.

Π.χ. $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ με τύπο $T(x,y,z,w)=(2x+y,2y,z+w,-2z+4w)$
Να βρεθούν τα $\chi_T(x)$ και $m_T(x)$ και αν A είναι ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση να υπολογίσετε τον $A^6-7A^5+16A^4-10A^3-14A^2+33A-23I=$
$=f(A)$, για $f(x)=x^6-7x^5+16x^4-10x^3-14x^2+33x-23$

Λύση

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-2&4\end{pmatrix}\Rightarrow \chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda&1&\boxed{0\quad 0}\\0&2-\lambda&\boxed{0\quad 0}\\\boxed{0\quad 0}&&1-\lambda&1\\\boxed{0\quad 0}&&-2&4-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 \cdot (\lambda^2+4-5\lambda+2)$$

$$= (2-\lambda)^2\,(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) = (2-\lambda)^3 \cdot (3-\lambda)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\lambda_4 = 3$

για να είναι μονικό

Πιθανά ελάχιστα: $(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)$, $-(2-\lambda)^2\cdot(3-\lambda)$, $(2-\lambda)^3\cdot(3-\lambda)$

Ψάχνω ποιο είναι?

- $$(2I-A)\cdot(3I-A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{4\times4}$$

Άρα ο A <u>δεν</u> διαγωνοποιείται καθώς το $(2-\lambda)(3-\lambda)$ που είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων <u>δεν</u> είναι το ελαχ. πολ/μο του A

- $$(2I-A)^2\cdot(3I-A) = (2I-A)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= 0_{4\times4}$, Άρα: $m_A(\lambda) = -(2-\lambda)^2\cdot(3-\lambda) \Rightarrow$

$\Rightarrow m_A(x) = -(2-x)^2\cdot(3-x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

$f(x) = x^6 - 7x^5 + 16x^4 - 10x^3 - 14x^2 + 33x - 23 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(A) =$

$f(x) = m_A(x)\,\pi(x) + u(x) \Rightarrow f(A) = \underbrace{m_A(A)}_{4\times4}\,\pi(A) + u(A) = u(A)$

$\deg(u(x)) < 3 = \deg m_A(x)$

$$\begin{array}{l|l} x^6 - 7x^5 + 16x^4 - 10x^3 - 14x^2 + 33x - 23 & x^3 - 7x^2 + 16x - 12 \\ \hline -x^6 + 7x^5 - 16x^4 + 12x^3 & x^3 + 2 \\ \quad 2x^3 - 14x^2 + 33x - 23 & \\ \quad -2x^3 + 14x^2 - 32x + 24 & \\ \quad x + 1 & \end{array}$$

$$f_{X}(x) = m_A(x)(x^3+2) + x + 1 \Rightarrow f(A) = A + I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Εκθετική Δύναμη πίνακα

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad 0! = 1$$

$$e^x = x^0 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{k \to \infty} \boxed{\sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}}$$

πολυώνυμο

<u>Ερώτημα:</u> Ορίζεται το e^A ???

$$e^x = x^0 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^A = I + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots ?$$

Π.χ. $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\left(\quad \right)^3 + \dots =$

$$= \begin{pmatrix} \text{Σειρά} & \text{Σειρά} \\ \text{Σειρά} & \text{Σειρά} \end{pmatrix}$$

Μάς ενδιαφέρει αν κάθε μία από αυτές τις σειρές συγκλίνουν. Αν ο A είναι νχν και το e^A είναι ένας νχν πίνακας. Οπότε θέλουμε κάθε σειρά στην αντίστοιχη θέση του πίνακα συγκλίνει.

Θεώρημα: Αν $e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots +$, τότε αυτός ο πίνακας ορίζεται, δηλ. κάθε σειρά στην αντίστοιχη θέση συγκλίνει για κάθε πίνακα A.

Ισχύει ότι:

$$\boxed{e^{0_{\nu\times\nu}} = I} \quad \text{και} \quad \boxed{e^{(A+B)} = e^A \cdot e^B}$$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ Να υπολογιστεί ο e^A

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό:

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^3}{3!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^3}{3!} \end{pmatrix} + \dots =$$

Ξέρω όμως ότι: $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{2!} + \frac{\lambda_1^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2^2}{2!} + \frac{\lambda_2^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Αυτό ισχύει μόνο όταν ο A είναι διαγώνιος

Γενικά! Αν ο $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

• Ας υποθέσουμε ότι ο A διαγωνοποιείται $\Rightarrow$
$A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$ με $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = P \cdot I \cdot P^{-1} + \frac{P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}}{1!} + \frac{(P \cdot \Lambda \cdot P^{-1})^2}{2!} +$$
$$+ \frac{(P \cdot \Lambda P^{-1})^3}{3!} + \dots \Rightarrow (*)$$

$$(P \cdot \Lambda \cdot P^{-1})^k = P \cdot \Lambda^k \cdot P^{-1} = \underbrace{P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} \cdot P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} \cdot \dots \cdot P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}}_{k\text{-φορές}}$$

(φεύγουν τα ενδιάμεσα διότι $P^{-1} \cdot P = I_n$

$$(*) \Rightarrow e^A = P \cdot I \cdot P^{-1} + \frac{P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}}{1!} + \frac{P \cdot \Lambda^2 \cdot P^{-1}}{2!} + \frac{P \cdot \Lambda^3 \cdot P^{-1}}{3!} + \dots =$$
$$= P \left(I + \frac{\Lambda}{1!} + \frac{\Lambda^2}{2!} + \frac{\Lambda^3}{3!} + \dots \right) P^{-1} =$$
$$= P \cdot (e^\Lambda) \cdot P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Πόρισμα: Αν ο A διαγωνοποιείται (: δηλ. $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$, με Λ = διαγώνιο), τότε: $e^A = P \cdot e^\Lambda \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$

Π.χ. Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, ν.β. η εκθετική δύναμη του.

Λύση: Θέλουμε τον e^A. Εξετάζουμε αν ο A διαγωνοποιείται

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow$$

Διαγωνοποιείται

$$V(1): \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$V(1) = \langle (1,1) \rangle$$

$$V(2): \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x + y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

$$V(2) = \langle (1,2) \rangle, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}}$$

$$e^A = P \cdot e^{\Lambda} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2 \\ e & 2e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e - e^2 & -e + e^2 \\ 2e - 2e^2 & -e + 2e^2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} 2e - e^2 & -e + e^2 \\ 2e - 2e^2 & -e + 2e^2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$